

MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA CINEMÁTICA DIRECTA E INVERSA DE UN ROBOT MANIPULADOR DE TRES GRADOS DE LIBERTAD¹

MATHEMATICAL MODELING OF THE DIRECT AND INVERSE KINETICS OF A HANDLING ROBOT WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

Recibido: 12 de julio del 2012

Aprobado: 15 de septiembre del 2012

JOSÉ LUIS RAMÍREZ ARIAS*

ASTRID RUBIANO FONSECA**

Resumen

En este artículo de investigación se describe de forma detallada el modelo matemático de la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de tres grados de libertad, con el objetivo de determinar la posición que debe tener cada una de las articulaciones del robot, así como la posición que alcanzará su extremidad final. El modelo fue desarrollado utilizando tanto las matrices de transformación homogéneas y los parámetros de Denavit-Hartenberg, como los métodos numéricos, verificando la eficiencia de los modelos propuestos. El modelo determinado presenta dos soluciones, condición que causa que la solución sea compleja de implementar dado que se requiere un proceso de decisión. Este desarrollo es producto del proyecto de investigación "Diseño e implementación de un robot manipulador de tres grados de libertad con fines educativos", adelantado por el grupo de investigación "Automatización Industrial", y aprobado por Conadi en la convocatoria del 2009, Universidad Cooperativa de Colombia, sede Bogotá, programa de Ingeniería Electrónica.

Palabras clave: cinemática directa, cinemática inversa, control de robot, manipulador, métodos numéricos.

Abstract

This research paper describes in detail the mathematical models for the direct and inverse kinetics of a handling robot with three degrees of freedom, with the objective of determining the position for each of the robot's articulations, as well as the positions that may be reached by the final extremity. The model was developed using homogeneous transformation matrixes and Denavit-Hartenberg parameters, as well as numerical methods to verify the efficiency of the proposed models. The model we developed presents two solutions; this makes its implementation complex since a decision process is needed. This development is the result of the research project: "Design and implementation of a Handling Robot with three degrees of freedom for educational purposes", approved by Conadi in the 2009 call for research projects. The project is being carried out by the Industrial automation research group from the program of Electronic Engineering of the Universidad Cooperativa de Colombia.

Keywords: direct kinetics, inverse kinetics, robot control, handling, numerical methods.

Cómo citar este artículo: J.L. Ramírez Arias, A. Rubiano Fonseca. "Modelamiento matemático de la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de tres grados de libertad". *Revista Ingeniería Solidaria*, vol. 8, núm. 15, 2012, pp. 46-52.

¹ Artículo de investigación derivado del proyecto de investigación "Diseño e implementación de un robot manipulador de tres grados de libertad con fines educativos", adelantado por el grupo de investigación "Automatización Industrial", y aprobado por el Comité Nacional para el Desarrollo de la Investigación (Conadi) en la convocatoria del 2009, de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Bogotá, programa de Ingeniería Electrónica.

* Ingeniero en Mecatrónica de la Universidad Militar Nueva Granada. MSc en Sistemas Automáticos de Producción de la Universidad Tecnológica de Pereira. Docente de Ingeniería Electrónica de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Bogotá.
Correo electrónico: jose.ramirez@campusucc.edu.co

** Ingeniera en Mecatrónica de la Universidad Militar Nueva Granada. MSc en Sistemas Automáticos de Producción de la Universidad Tecnológica de Pereira. Docente de Ingeniería Electrónica de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Bogotá.
Correo electrónico: astrid.rubiano@campusucc.edu.co

Introducción

Los robots industriales y los sistemas asistidos por computador son la última tendencia en la automatización de los procesos de fabricación, ya que los avances en el campo de los sensores permiten desarrollar tareas cada vez más sofisticadas.

El uso de robots en la industria es amplio, ya que permite realizar tareas que son peligrosas o monótonas para los seres humanos; este es el caso del robot industrial que se utiliza para la limpieza en las subestaciones eléctricas, en las que se trabaja con sistemas de alta tensión [1, 2].

Los robots manipuladores se caracterizan por tener limitaciones de diseño relacionado con la estabilidad y la distribución de equilibrio y peso. Otra consideración importante en el diseño de robots manipuladores es el análisis cinemático, debido a que implica calcular las posiciones relativas entre el sistema de coordenadas unida a las partes móviles con respecto a un solo sistema de coordenadas, lo cual causa un aumento de la incertidumbre y el error acumulado en las transformaciones. Como consecuencia de ello se afecta la precisión en el posicionamiento y seguimiento de las trayectorias del manipulador. Es importante destacar que generalmente el análisis de la cinemática se aborda de forma directa para así calcular la posición del punto final del robot como función de los valores articulares (ángulos) y de forma inversa para calcular el valor de las coordenadas articulares como función de la posición final; este procedimiento es importante, ya que permite posicionar el robot en un punto dentro de su volumen de trabajo.

La solución de la cinemática inversa de un robot industrial puede proporcionar múltiples configuraciones para una sola posición, pues esta surge de la solución de una ecuación que no es de primer orden. Es así como el sistema puede tener múltiples soluciones, siendo frecuente el uso de algoritmos que permitan aproximarse a una solución numérica; es el caso del experimento con el robot PUMA y el robot Scara, que usan algoritmos genéticos e inteligencia artificial para calcular la posición final [3-8].

Otra estrategia comúnmente usada para solucionar la cinemática inversa es el uso de redes neuronales, las cuales utilizan la función radial. Las características más destacadas de la función incluyen la predicción precisa de la cinemática inversa y soluciones con menos tiempo de cálculo; los datos de entrenamiento para la red neuronal se generan con las relaciones de la cinemática directa del robot [9, 10].

También se han utilizado diferentes redes neuronales como perceptrón simple, *back propagation*, que evidencian exactitud en el cálculo de las posiciones y trayectorias [11]. Así, teniendo en cuenta los desarrollos anteriores, se hace necesario proponer el modelo matemático para la cinemática directa e inversa del robot manipulador, el cual se está desarrollando por el grupo de investigación en automatización industrial de la Universidad Cooperativa de Colombia.

Metodología

Descripción general del robot

El análisis presentado en este documento es el resultado del desarrollo del proyecto titulado: "Diseño y construcción de un robot manipulador antropomórfico con tres grados de libertad con fines educativos". El robot llamado Teachbot-01 se propuso con tres grados de libertad y una pinza en su extremo, con un alcance de 873 mm y capacidad de carga de 50 g. Se ha propuesto una arquitectura abierta para permitir la interacción con los componentes del robot, ofreciendo la posibilidad de poner en práctica diferentes estrategias de control y, posteriormente, optimización en el diseño del robot.

Cinemática directa

La solución al problema de la cinemática directa consiste en encontrar el valor de la posición final del robot manipulador, esta solución es una función de los valores articulares, es decir, el valor traslacional o rotativo de las articulaciones. En la actualidad existen diferentes métodos para resolver este problema, pero en el caso presente se hizo uso de las matrices de transformación homogénea, usando el método de la representación sistemática de Denavit-Hartenberg. Aunque la cinemática del robot se puede solucionar geoméricamente, el método propuesto ofrece la ventaja de conocer tanto la posición final de manipulador como la posición de cada una de sus articulaciones [12].

La representación de Denavit-Hartenberg se reemplaza en la matriz de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$, la cual es un arreglo de 4×4 que contiene información relativa a la posición y orientación del sistema de referencia unido al i enlace del manipulador en relación con el sistema de referencia de la conexión $i-1$; de esa manera, la matriz 0A_1 representa la posición y orientación del sistema de coordenadas S_1 del robot con respecto al sistema de coordenadas S_0 , si S_0 se coloca en el eje

del manipulador y S1 al final de un eslabón, la matriz 0A_1 representa la posición de S1 referenciada al sistema de coordenadas fijo del robot. De esta forma, la matriz 0A_n , en la que n es el grado de libertad, es aquella que representa la posición final del manipulador con respecto al sistema de referencia; esta matriz comúnmente es denominada T y se representa mediante las ecuaciones 1 y 2:

$$T = {}^0A_n = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \dots {}^{n-1}A_n, n \rightarrow Dof \quad (1)$$

$$T = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}A_i \quad (2)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para el cálculo de ${}^{i-1}A_i$ se deben definir los parámetros de Denavit-Hartenberg, los cuales se basan exclusivamente en las características geométricas de cada enlace y los sistemas de coordenadas en cada uno.

Las características de los parámetros son:

θ_i rotación alrededor del eje Zi-1

d_i translación a lo largo de Zi-1 eje

a_i translación lo largo del eje Xi

α_i rotación alrededor del eje Xi [13]

Los sistemas de coordenadas deben ser colocados como en la figura 1, para cumplir con las características de los parámetros mencionados anteriormente. En la tabla 1 se muestran los parámetros de Denavit-Hartenberg para el Teachbot-01.

Tabla 1. Parámetros de Denavit-Hartenberg

Articulación	θ^a	$d[m]^b$	$a[m]^c$	$\alpha[rad]^d$
1	θ_1	0,28616	0	$\pi/2$
2	θ_2	0	0,30226	0
3	θ_3	0	0,285	0

Fuente: los autores

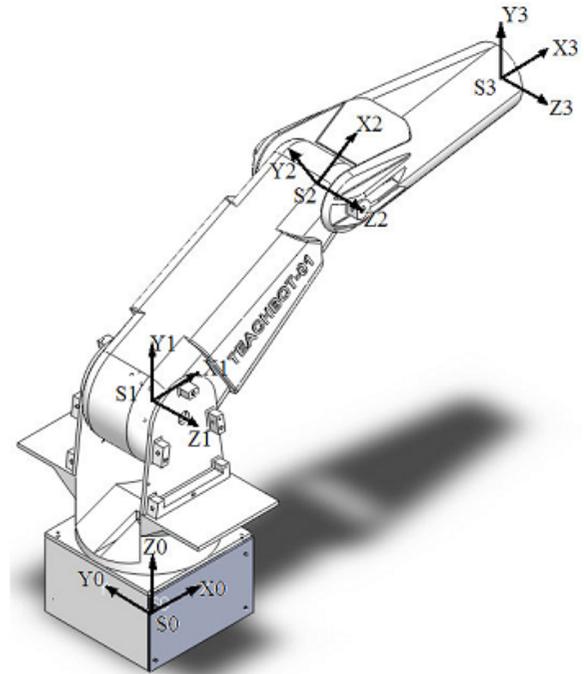


Figura 1. Localización de ejes coordenados

Fuente: el autor

La forma general de las matrices de rotación es:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Reemplazando los valores de la tabla 1 en la ecuación 3, se tiene:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,28616 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0,30226 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0,30226 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0,285 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0,285 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones 4, 5 y 6 en la ecuación 2, se tiene una matriz de la forma.

$$T = \begin{bmatrix} n & o & a & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Las coordenadas del punto final son:

$$P_x = 0,30226 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + 0,285 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) - 0,285 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \quad (9)$$

$$P_y = 0,30226 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + 0,285 \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - 0,285 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \quad (10)$$

$$P_z = 0,30226 \sin(\theta_2) + 0,285 \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) + 0,285 \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + 0,28616 \quad (11)$$

Cinemática inversa

La cinemática inversa de un manipulador es un término usado para denotar el cálculo de los valores articulares (ángulos de las juntas) del manipulador, necesario para posicionar un punto en el espacio referenciado al sistema de coordenadas global del manipulador. Para este caso, se calcularon los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 basado en el punto P_x , P_y y P_z , paso mostrado en la sección anterior.

Existen diferentes formas de abordar el problema de la cinemática inversa, particularmente se propone un conjunto de ecuaciones cerradas que, a través de relaciones matemáticas, determinan los puntos adecuados para hacer que el robot haga el seguimiento de trayectoria, proporcionando así una solución en tiempo real.

$$\theta_k = f_k(P_x, P_y, P_z) \quad (12)$$

$$k = 1 \dots n(DOF)$$

Este tipo de función se puede calcular utilizando diferentes métodos; para este caso, y puesto que es un manipulador con tres grados de libertad, se seleccionó la matriz de transformación homogénea.

La ecuación 1 para un manipulador con tres grados de libertad se reduce a:

$$T = {}^0A_n = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \quad (13)$$

Los vectores n , o y a representan la orientación del punto final del robot, y el vector P representa el valor de las coordenadas x , y y z en función de los ángulos θ .

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dado que la matriz T es de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Resolviendo la ecuación 13 para 2A_3 , se obtiene un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, basadas en el punto P_x , P_y y P_z .

$$({}^0A_1)^{-1} ({}^1A_2)^{-1} T = {}^2A_3 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,28616 \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 & -0,30226 \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^*$$

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0,285 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0,285 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Al igualar la columna 4 de cada lado de la ecuación 16, se tiene:

$$P_z \sin(\theta_2) - 286,16 \sin(\theta_2) + P_x \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + P_y \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) - 302,26 = 0,285 \cos(\theta_3) \quad (17)$$

$$P_z \cos(\theta_2) - 286,16 \cos(\theta_2) - P_x \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - P_y \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = 0,285 \sin(\theta_3) \quad (18)$$

$$P_x \sin(\theta_1) - P_y \cos(\theta_1) = 0 \quad (19)$$

De la ecuación 19, se puede calcular el valor del ángulo θ_1 .

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \frac{P_y}{P_x} = \tan(\theta_1) \quad (20)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(\theta_1) \quad (21)$$

Al factorizar en las ecuaciones 17 y 18, se obtiene:

$$P_z \sin(\theta_2) - 286,16 \sin(\theta_2) + P_x \cos(\theta_2) \cos(\theta_2) + P_y \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) - 302,26 = 285 \cos(\theta_3) \quad (22)$$

$$\sin(\theta_2) [P_z - 286,16] + \cos(\theta_2) [P_x \cos(\theta_1) + P_y \sin(\theta_1)] - 302,26 = 285 \cos(\theta_3) \quad (23)$$

$$P_z \cos(\theta_2) - 286,16 \cos(\theta_2) - P_x \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - P_y \sin(\theta_2) \sin(\theta_2) = 285 \sin(\theta_3) \quad (24)$$

$$-\sin(\theta_2) [P_x \cos(\theta_2) + P_y \sin(\theta_2)] + \cos(\theta_2) [P_z - 286,16] = 285 \sin(\theta_3) \quad (25)$$

Si se reemplaza:

$$a = P_x \cos(\theta_1) + P_y \sin(\theta_1) \quad (26)$$

$$b = P_z - 286,16 \quad (27)$$

$$\sin(\theta_2)b + \cos(\theta_2)a - 302,26 = 285 \cos(\theta_3) \quad (28)$$

$$-\sin(\theta_2)a + \cos(\theta_2)b = 285 \sin(\theta_3) \quad (29)$$

Al sumar las ecuaciones 27 y 28 elevadas al cuadrado, se tiene:

$$a \cos(\theta_2) + b \sin(\theta_2) = \frac{[a^2 + b^2] + 10136}{60452} \quad (30)$$

$$c = \frac{[a^2 + b^2] + 10136}{60452} \quad (31)$$

$$\cos(\theta_2) + b \sin(\theta_2) = c \quad (32)$$

La ecuación 32 es una ecuación trascendental de una sola variable, por lo que se usa la siguiente relación para lograr una aproximación polinomial:

$$u = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (33)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad (34)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad (35)$$

Al reemplazar, se tiene:

$$a \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + b \frac{2u}{1 + u^2} = c \quad (36)$$

$$(1 - u^2)a + 2ub = c(1 + u^2) \quad (37)$$

$$u^2(a + c) - 2ub + c - a = 0 \quad (38)$$

$$u = \frac{2ub \pm \sqrt{4b^2 - 4(c^2 - a^2)}}{2(a+c)} \quad (39)$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c} = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (40)$$

$$\theta_2 = 1 \tan^{-1}\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - c^2}}{a+c}\right) \quad (41)$$

Si se dividen las ecuaciones 29 y 28, se obtiene:

$$\tan(\theta_3) = \frac{-\sin(\theta_2)a + \cos(\theta_2)b}{\sin(\theta_2)b + \cos(\theta_2)a - 302,26} \quad (42)$$

$$(\theta_3) \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(\theta_2)a + \cos(\theta_2)b}{\sin(\theta_2)b + \cos(\theta_2)a - 302,26}\right) \quad (43)$$

Las ecuaciones 21, 42 y 43 son la solución para la cinemática inversa del robot.

Resultados y discusión

A continuación se describen los resultados obtenidos con respecto a la cinemática directa y a la cinemática inversa. En las ecuaciones 17 a 19 se muestra el valor de las coordenadas x, y, z del punto final del manipulador con respecto al sistema de referencia global. En las ecuaciones 21, 41 y 43 se muestra el valor de los ángulos que tendrá cada una de las articulaciones del robot manipulador.

El modelo determinado anteriormente presenta dos soluciones por las articulaciones θ_2 y θ_3 , esta condición causa que la solución sea compleja de implementar, dado que se requiere un proceso de decisión para seleccionar una de las dos posibles respuestas; por otra parte, se analizó el comportamiento del modelo de la cinemática inversa en puntos que se encuentran fuera del espacio de trabajo del manipulador, determinando que para estos valores el resultado es un número complejo.

Conclusiones

En general, el modelo matemático propuesto es viable, ya que puede ser programado y, por tanto, puede ser automatizado; aún así, el análisis numérico es una alternativa importante en la solución de los sistemas cuyo modelo matemático parece ser muy complejo.

Se puede proponer un algoritmo numérico que, según el modelo matemático encontrado, calcule una aproximación a la solución evitando solucionar la ecuación cuadrática, ya que esta podría ofrecer resultados imaginarios o complejos.

También se puede proponer una estrategia de optimización que permita interpolar los mejores valores para una solución; esta se puede implementar usando la herramienta Matlab, ya que se cuenta con un Toolbox para optimización.

Referencias

- [1] E. Vargas, L. Villarreal, J.M. Reynoso y R. Mier Maza. *Diseño de un manipulador industrial para aplicaciones de limpieza en subestaciones eléctricas*. Monterrey: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Centro Metropolitano de Investigación en Mecatrónica. 2001.
- [2] J.R. Vargas *et al.* *Robot manipulador para aplicación de recubrimiento en líneas de alta tensión*. Monterrey: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. 2001.
- [3] P. Kalra, P.B. Mahapatra, D.K. Aggarwal. "An evolutionary approach for solving the multimodal inverse kinematics problem of industrial robots". *Mechanism and machine theory*, vol. 41, núm. 10, 2006, octubre, pp. 1213-1229.
- [4] Z.S. Abo-Hammour, N.M. Mirza, S. M. Mirza, M. A. "Cartesian path generation of robot manipulators using continuous genetic algorithms". *Robotics and autonomous systems*, vol. 41, núm. 4, 2002, diciembre, pp. 179-223.
- [5] M. da Graca Marcos, J.A. Tenreiro Machado y T.P. Azevedo Perdicoulis. "Trajectory planning of redundant manipulators using genetic algorithms". *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, vol. 14, núm. 7, 2009, julio, pp. 2858-2869.
- [6] A.C. Nearchou. "Solving the inverse kinematics problem of redundant robots operating in complex environments via a modified genetic algorithm". *Mechanism and machine theory*, vol. 33, núm. 3, 1998, abril, pp. 273-292.
- [7] P. Th. Zacharia, N.A. Aspragathos. "Optimal robot task scheduling based on genetic algorithms". *Robotics and computer integrated manufacturing*, vol. 21, núm. 1, 2005, febrero, pp. 67-79.
- [8] Wei-Min Yun, Yu-Geng Xi. "Optimum motion planning in joint space for robots using *genetics and Autonomous Systems*, vol. 18, núm. 4, 1996, octubre, pp. 373-393.
- [9] S. Shital, N. Chiddarwar, R. Babu. "Comparison of RBF and MLP neural networks to solve inverse kinematic

- problem for 6R serial robot by a fusion approach”. *Engineering applications of artificial intelligence*, vol. 23, núm. 7, 2010, octubre, pp. 1083-1092.
- [10] R. Köker, C. Öz, T. Çakar, H. Ekiz. “A study of neural network based inverse kinematics solution for a three-joint robot”. *Robotics and autonomous systems*, vol. 49, núm. 3-4, Patterns and autonomous control, 2004, diciembre, pp. 227-234.
- [11] E. Dermatas, A. Nearchou, N. Aspragathost. “Error back - propagation solution to the inverse kinematic problem of redundant manipulators”. *Robotics and computer integrated manufacturing*, vol. 12, núm. 4, 1996, diciembre, pp. 303-310.
- [12] H.S. Lee, S.L. Chang. “Development of a CAD/CAE/CAM system for a robot manipulator”. *Journal of Materials Processing Technology*, núm. 140, 2003, pp. 100-104.