

# Identificación del comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz empleando máquinas de soporte vectorial

*Identification of the chaotic behavior of Lorenz equations using vector support machines*

*Identificação do comportamento caótico das equações de Lorenz no emprego de máquinas de vetores de suporte*

Lilian Astrid Bejarano-Garzón<sup>1</sup>  
Víctor Hugo Medina-García<sup>2</sup>  
Helbert Eduardo Espitia-Cuchango<sup>3</sup>

**Recibido:** septiembre 10 del 2018

**Aprobado:** noviembre 30 del 2018

**Disponible en línea:** enero 15 del 2019

#### **Cómo citar este artículo:**

L. A. Bejarano-Garzón, V. H. Medina-García, H. E. Espitia-Cuchango, "Identificación del comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz empleando máquinas de soporte vectorial", *Revista Ingeniería Solidaria*, vol. 25, n.º 1, 2019.  
DOI: <https://doi.org/10.16925/2357-6014.2019.01.08>

---

Artículo de investigación. <https://doi.org/10.16925/2357-6014.2019.01.08>

<sup>1</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-1381-6522>

<sup>2</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-0989-8676>

<sup>3</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-0742-6069>

Correo electrónico: [heespitiac@udistrital.edu.co](mailto:heespitiac@udistrital.edu.co)

## Resumen

*Introducción:* el artículo se deriva de la investigación "Caracterización de señales complejas con técnicas de Inteligencia Computacional" que se encuentra en curso desde el 2016 dentro del Grupo de Investigación Modelamiento en Ingeniería de Sistemas MIS de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

*Objetivo:* identificar el comportamiento caótico que presentan las ecuaciones de Lorenz empleando datos tomados directamente en el dominio del tiempo sin procesamiento previo, para lograr clasificar un sistema caótico.

*Metodología:* en primer lugar, se obtienen los datos de entrenamiento mediante simulación. Posteriormente, se observa la respuesta del sistema utilizando datos de validación. Finalmente, se realiza una discusión y se establecen las conclusiones en función de los datos obtenidos.

*Resultados:* para la mayoría de las máquinas de soporte vectorial utilizadas se observa una buena clasificación.

*Conclusión:* para el conjunto de datos empleados se logró la clasificación del comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz mediante máquinas de soporte vectorial, de tal forma que estas pueden ser una alternativa para realizar la clasificación de comportamientos, donde se toman datos directamente en el dominio del tiempo sin un procesamiento preliminar.

*Originalidad:* esta investigación servirá de referente para posteriores desarrollos como el diagnóstico de pacientes utilizando señales biológicas. En este documento se busca observar las características que presentan las máquinas de soporte vectorial para la clasificación de un sistema caótico.

*Limitaciones:* no se realiza un procesamiento preliminar de datos por lo cual la clasificación está sujeta por los valores obtenidos directamente de la simulación.

**Palabras clave:** Caos, ecuaciones de Lorenz, máquinas de soporte vectorial.

## Abstract

*Introduction:* The article is derived from the research Characterization of complex signals with Computational Intelligence techniques that has been ongoing since 2016 within the investigation Group Modelación en Ingeniería de Sistemas MIS of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

*Objective:* Determine the chaotic behavior in equations of Lorenz by using data directly taken from the time domain without prior processing, in order to classify a chaotic system. *Methodology:* Firstly, through simulation training data is acquired; later, it is used validation data to observe the system response. Finally, it is presented a discussion together with a set of conclusions regarding the data obtained.

*Results:* In most of the implemented vector support machines a positive classification is prevailing.

*Conclusion:* The data set used for the classification of the chaotic behavior in Lorenz equations was achieved implementing vector support machines, so they may be an alternative to obtaining behavior classification where data are directly taken from the time domain with none prior processing.

*Originality:* This paper is expected to serve to further developments as in diagnosis of patients using biological signals. This work is aimed to the observation of the characteristics manifested in the vector support machines to chaotic system classification.

*Limitations:* None preliminary data processing is performed wherefore such classification is subjected by the values obtained directly from the simulation.

**Keywords:** Chaos, equations of Lorenz, vectorial support machines.

## Resumo

*Introdução:* o artigo é derivado da pesquisa "Caracterização de sinais complexos com técnicas de Inteligência Computacional", que se encontra em curso desde 2016 dentro do Grupo de Pesquisa Modelamento em Engenharia de Sistemas MIS da Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

*Objetivo:* identificar o comportamento caótico que as equações de Lorenz apresentam com o emprego de dados coletados diretamente no domínio de tempo, sem processamento prévio, para conseguir classificar um sistema caótico.

*Metodología:* em primeiro lugar, obtêm-se os dados de treinamento por meio de simulação. Posteriormente, observa-se a resposta do sistema utilizando dados de validação. Finalmente, realiza-se uma discussão e estabelecem-se as conclusões em função dos dados obtidos.

*Resultados:* observa-se uma boa classificação para a maioria das máquinas de vetores de suporte utilizadas.

*Conclusão:* para o conjunto de dados empregados, conseguiu-se a classificação do comportamento caótico das equações de Lorenz por meio de máquinas de vetores de suporte, de tal forma que estas podem ser uma alternativa para realizar a classificação de comportamentos, na qual os dados são coletados diretamente no domínio do tempo, sem um processamento preliminar.

*Originalidade:* esta pesquisa servirá de referência para posteriores desenvolvimentos, como o diagnóstico de pacientes por meio de sinais biológicos. Neste documento, busca-se observar as características que as máquinas de vetores de suporte apresentam para a classificação de um sistema caótico.

*Limitações:* um processamento preliminar de dados não é realizado, portanto a classificação está sujeita aos valores obtidos diretamente da simulação.

**Palavras-chave:** Caos, equações de Lorenz, máquinas de vetores de suporte.

## 1. Introducción

En la naturaleza se presentan diferentes comportamientos los cuales pueden llegar a ser complejos de modelar, uno de estos corresponde a la descripción del clima, del cual, el modelo de Lorenz constituye una aproximación, compuesto por ecuaciones simplificadas de la convección presente en la atmósfera terrestre [1], [2].

Las ecuaciones de Lorenz se caracterizan por presentar comportamiento caótico para cierta configuración de parámetros, al producir órbitas no periódicas, es decir, que sus variables no presentan combinación de valores que se repitan de forma periódica, sin embargo, se puede apreciar un comportamiento de tipo "cíclico". Adicionalmente, la evolución de sus valores depende de las condiciones iniciales que tenga el sistema [3], [4].

Sobre algunos análisis que se han realizado, en [5] se propone tanto una versión completa como una parcial linealizada por partes del sistema Lorenz. Estas ecuaciones se implementan a nivel circuital y se obtiene un resultado que concuerda con el cálculo numérico de las ecuaciones de Lorenz. Otro análisis se puede apreciar en [6] donde se propone y justifica que existe un atractor caótico oculto en el sistema clásico

de Lorenz. Para mostrar esto, se emplea una búsqueda sistemática exhaustiva con el fin de encontrar directamente el atractor caótico oculto para diferentes valores de los parámetros del sistema y condiciones iniciales.

Por otra parte, las máquinas de soporte vectorial SVM (Support Vector Machines) presentan una estructura adecuada para caracterizar un conjunto de datos empleando para esto los denominados vectores de soporte los cuales son datos característicos que se emplean para realizar la discriminación entre grupos [7]. También al emplear funciones de kernel se puede extender la clasificación de los datos cuando no es posible realizar directamente una separación lineal de estos.

Considerando enfoques que utilizan varios planos de separación, se proponen las máquinas gemelas de soporte vectorial (Twin Support Vector Machine TWSVM) lo cual es un método emergente de aprendizaje automático adecuado para problemas de clasificación y regresión [8]. Con este enfoque se encuentran dos planos no paralelos para cada clase que resuelven un par de problemas de programación cuadrática. De acuerdo con [8], esta propuesta mejora la velocidad de cálculo en comparación con una máquina de soporte vectorial (SVM) tradicional. En [9] se revisa y efectúa una propuesta para utilizar las máquinas de soporte vectorial gemelas en problemas de regresión.

Según [10], el aprendizaje con múltiple núcleo permite procesar de manera flexible diversas características de patrones tales como información heterogénea, datos irregulares y distribución no plana de muestras con alta dimensionalidad. Considerando esto, en [10] se realiza el desarrollo de una máquina de soporte vectorial no paralela donde se utilizan dos hiperplanos de clasificación no paralelos.

Sobre aplicaciones donde se consideran las ecuaciones de Lorenz, principalmente se han realizado diferentes trabajos para la predicción de la serie de tiempo producida por estas ecuaciones. Sobre algunos ejemplos de esto en [11] se realiza la predicción empleando redes neuronales, en [12] se utiliza un sistema neuro-difuso Takagi Sugeno y en [13] se tiene una propuesta para predecir valores de las ecuaciones de Lorenz empleando un sistema neuro-difuso basado en relaciones booleanas.

Sobre otros trabajos, en [14] se propone un método para calcular todos los exponentes de Lyapunov para diferentes series de tiempo. Este método consiste en utilizar redes neuronales para aproximar el sistema dinámico que genera la serie de tiempo. El modelo que aproxima el comportamiento del sistema dinámico corresponde a una red neuronal entrenada la cual se utiliza para calcular los exponentes de Lyapunov. El método propuesto se prueba con la serie de tiempo generada con las ecuaciones de Lorenz.

Según [15], los sistemas caóticos como el descrito por las ecuaciones de Lorenz generalmente se implementan directamente mediante un único grupo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Considerando esto, en [15] se presenta el diseño de una red neuronal artificial para implementar un generador caótico. Con este enfoque la red neuronal con retroalimentación se entrena utilizando los valores de salida de un sistema caótico, de tal forma que posteriormente la red neuronal pueda reproducir el comportamiento caótico.

Un trabajo adicional se puede apreciar en [16], donde se presenta un controlador discreto de modo deslizante para la supresión robusta de caos de los sistemas caóticos generalizados de tiempo continuo sujetos a perturbaciones. Esta propuesta se prueba en un sistema caótico basado en las ecuaciones de Lorenz.

En relación con aplicaciones de máquinas de soporte vectorial y sistemas caóticos, en [17] se realiza un estudio para la predicción de series de tiempo caóticas. En [18], una modificación de SVM con una ventana de olvido se utiliza para la predicción de series financieras. Por su parte, una propuesta con filtros de Kalman aplicados a la predicción de series caóticas se puede observar en [19].

Como es de apreciar, el enfoque principal que se tiene en los anteriores trabajos es para la predicción de la serie de tiempo, con la propuesta realizada en este trabajo se busca caracterizar el comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz empleando directamente datos provenientes de estas sin considerar el tiempo. Con este enfoque se busca tener una caracterización directamente de un conjunto de datos, lo cual puede ser práctico en aplicaciones complejas donde solo se disponga de los datos y la descripción mediante ecuaciones analíticas puede ser una labor compleja.

Este trabajo consiste en una aplicación en la que se espera observar los elementos involucrados para realizar clasificación mediante máquinas de soporte vectorial. Se espera emplear esta técnica en proyectos posteriores para la clasificación de las condiciones de un paciente mediante mediciones de señales biológicas tomadas directamente del tiempo sin necesidad de un procesamiento preliminar.

En esta propuesta se utilizan datos tomados directamente de la simulación de las ecuaciones de Lorenz, sin emplear un procesamiento previo, lo cual correspondería a una primera aproximación para este tipo de clasificación, de tal forma que se espera observar la capacidad de la máquina de soporte vectorial para realizar la clasificación bajo estas condiciones.

## 2. Metodología

Con el fin de poder clasificar los comportamientos de las ecuaciones de Lorenz mediante una máquina de soporte vectorial, en primer lugar, se realiza la simulación de las ecuaciones observando sus características para tener un comportamiento caótico. Posteriormente se revisan los aspectos fundamentales sobre las máquinas de soporte vectorial con el fin de ser entrenadas con los datos tomados de la simulación. Finalmente se obtienen los resultados para diferentes configuraciones de la máquina de soporte vectorial y se establecen las conclusiones en función de estos resultados.

### 2.1 Ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, con variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  que describen el estado del sistema y que pueden presentar un comportamiento caótico para ciertos valores de sus parámetros [3].

Las ecuaciones de Lorenz fueron propuestas como un modelo muy simplificado de la convección en forma de anillos que ocurren en la atmósfera terrestre [3]. Bajo este enfoque las variables del modelo son:

- $x$ : Razón de rotación del anillo.
- $y$ : Gradiente de temperatura.
- $z$ : Desviación de la temperatura respecto a su valor de equilibrio.

El conjunto de ecuaciones que relacionan estas variables son:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(x - y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \quad (2)$$

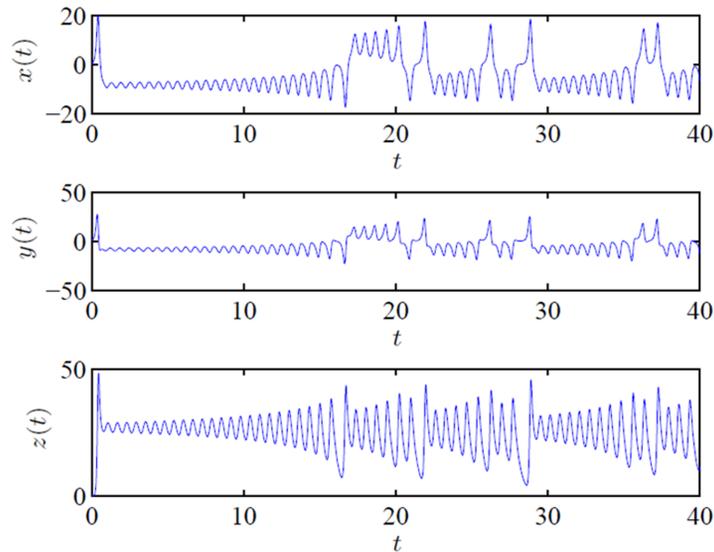
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (3)$$

Donde  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b > 0$  son parámetros,  $\sigma$  es el número de Prandtl,  $r$  es el número de Rayleigh y  $b$ , en problemas convencionales, está relacionado con la proporción de las capas. Estas ecuaciones han sido usadas en estudios de clima, láseres y dinamos [3].

Un comportamiento caótico se presenta cuando el valor de  $\sigma$  es 10,  $b$  es 8/3 y  $r$  es 28. Este valor de  $r$  es mayor que el valor de bifurcación de Hopf  $H_r = 24,74$  [3]. Un análisis sobre la transición hacia comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz se puede apreciar en [4].

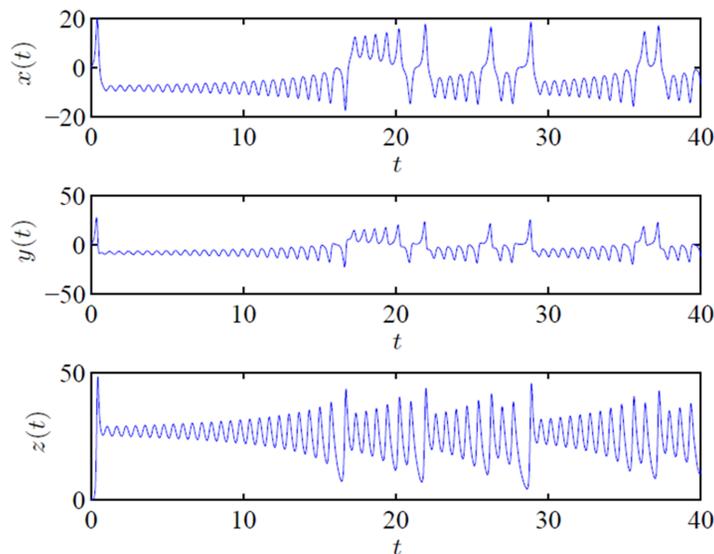
Tomando condiciones iniciales para  $(x, y, z)$  de  $(0,1;0,8;0,1)$  se tiene el comportamiento mostrado en la figura 1 el cual corresponde a un comportamiento caótico.

Por otra parte, tomando  $r$  de 10 se presenta un comportamiento asintótico estable presentando un comportamiento sin caos, lo cual se puede apreciar en la figura 2.



**Figura 1.** Ecuaciones de Lorenz, comportamiento caótico

Fuente: elaboración propia



**Figura 2.** Ecuaciones de Lorenz, comportamiento no caótico

Fuente: elaboración propia

## 2.2 Máquinas de soporte vectorial

Esta técnica permite la clasificación de datos mediante la construcción de hiperplanos en un espacio de características para lograr la separación entre clases [20]. En una primera instancia, se realiza el entrenamiento con un conjunto de datos de tal forma que después se puede realizar la clasificación de datos no empleados en el entrenamiento [21], [22].

Para establecer la mejor separación entre las clases (mediante los hiperplanos) se utilizan los puntos que se encuentran más cercanos a la separación de las clases los cuales se denominan vectores de soporte. Un ejemplo de esta situación en dos dimensiones se puede apreciar en la figura 3, en este caso con  $C_3$  no se logra la separación de las clases,  $C_2$  logra una separación subóptima mientras que  $C_1$  permite la clasificación óptima [23].

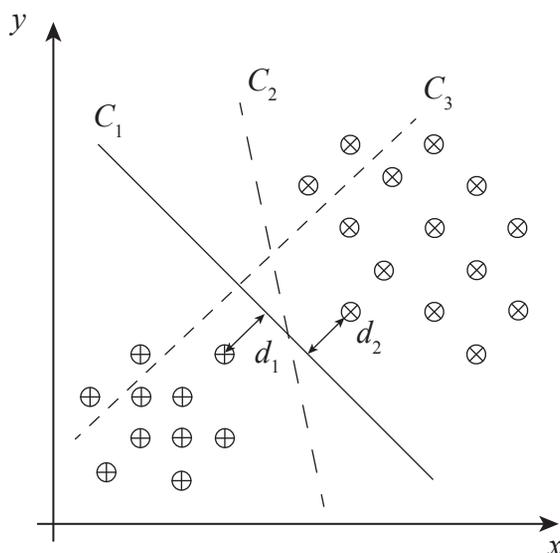


Figura 3. Ejemplo de separación en dos dimensiones

Fuente: adaptado de [23]

### 2.2.1 Funciones de kernel

Cuando el conjunto de datos por sus características no permite tener una separación lineal de las clases mediante hiperplanos, se pueden emplear funciones que transformen los datos a un espacio donde sea posible realizar la separación lineal. Este tipo de funciones permiten proyectar la información de los datos a un espacio de características de mayor dimensión aumentando de esta forma la capacidad para realizar la separación lineal [22]. En términos generales este mapeo corresponde a una transformación de la forma:

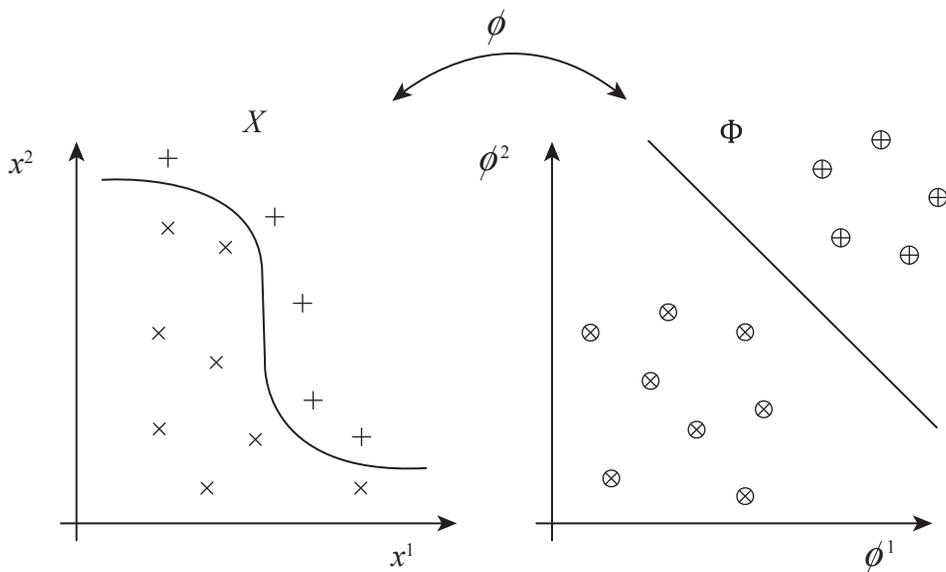
$$\phi = \{\phi(x) | x \in X\} \quad (4)$$

$$x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\} \quad (5)$$

$$\phi(x) = \{\phi^1(x), \phi^2(x), \dots, \phi^N(x)\} \quad (6)$$

Donde  $n$  corresponde a las características (dimensiones) para un dato  $x$  y  $N$  corresponde al número total de dimensiones donde se realiza el respectivo mapeo  $\phi \in \Phi$ .

En la figura 4 se puede apreciar el principio que se busca aplicar realizando la transformación  $\phi$ . En este caso, en el dominio de  $(x^1, x^2)$  o se puede realizar una clasificación mediante una separación lineal, mientras que en el espacio de  $(\phi^1, \phi^2)$  es posible una clasificación utilizando un separador lineal [23].



**Figura 4.** Ejemplo de transformación con funciones de kernel

Fuente: adaptado de [23]

Para efectos prácticos, en la implementación de las máquinas de soporte vectorial se utilizan las funciones de kernel definidas como:

$$K(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j) \quad (7)$$

Donde  $x_i$  y  $x_j$  son un par de datos con  $i = 1, \dots, l$  y  $j = 1, \dots, l$ , siendo  $l$  el número total de datos. Algunas funciones de kernel son:

Lineal:

$$K(x_i, x_j) = x_i^T x_j \quad (8)$$

Polinomial:

$$K(x_i, x_j) = \gamma(x_i^T x_j + c_0)^d \quad (9)$$

Base radial:

$$K(x_i, x_j) = e^{-\gamma(x_i - x_j)^2} \quad (10)$$

Sigmoidal:

$$K(x_i, x_j) = \tanh(\gamma x_i^T x_j + c_0) \quad (11)$$

### 2.2.2 Clasificación con máquinas de soporte vectorial

En primer lugar, se considera un conjunto de datos linealmente separables  $x_i \in R^n$  los cuales cada uno pertenece a una de dos clases de tal forma que se le puede asignar una etiqueta  $y_i \in \{1, -1\}$  con  $i = 1, \dots, l$  [23]. Se aplica una transformación  $z_i = \phi(x_i)$ , con  $z_i \in R^N$  la cual permite mapear a  $x_i$  en un espacio de mayores dimensiones de tal forma que se pueda realizar una mejor clasificación de los datos, entonces, se busca realizar la separación con un hiperplano de la forma [23]:

$$w^T z + b = 0 \quad (12)$$

Este hiperplano tiene como parámetros  $(w, b)$  y permite realizar la clasificación de un dato  $x_i$  con:

$$\begin{aligned} \text{sign}(w^T z_i + b) &= \text{sign}(w^T \phi(x_i) + b) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } y_i = 1 \\ -1, & \text{si } y_i = -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

De esta forma el conjunto de datos es linealmente separable si es posible establecer  $(w, b)$ , de modo que las inecuaciones de 14 se cumplan para todos los datos  $i = 1, \dots, l$ . Al cumplirse lo anterior es posible encontrar un hiperplano óptimo que maximiza la separación entre las clases [23].

$$\begin{cases} (w^T z_i + b) \geq 1, & \text{si } y_i = 1 \\ (w^T z_i + b) \leq -1 & \text{si } y_i = -1 \end{cases} \quad (14)$$

De forma compacta estas restricciones se pueden expresar como:

$$y_i(w^T z_i + b) \geq 1 \quad (15)$$

Como es de apreciar, en un sentido práctico el cumplimiento de la anterior situación depende de los datos por lo cual no siempre se puede garantizar, de tal forma que se incorporan variables  $\xi_i \geq 0$  para ajustar los datos que no cumplan la separación lineal teniendo:

$$y_i(w^T z_i + b) \geq 1 - \xi_i \quad (16)$$

Cuando se realiza el cálculo de la suma de estas holguras el término 17 corresponde a un indicador del error que se puede tener en la clasificación [23].

$$\sum_{i=1}^l \xi_i \quad (17)$$

De esta forma se puede establecer el problema del hiperplano óptimo como [23], [24]:

$$\begin{aligned} \min_{w, b, \xi} & \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^l \xi_i \\ \text{s.a.} & y_i(w^T \phi(x_i) + b) \geq 1 - \xi_i \\ & \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (18)$$

Donde  $C$  es un parámetro libre de regularización el cual permite hacer un balance entre la maximización del margen y la violación de la clasificación [23].

Mediante los multiplicadores de Lagrange y construyendo el Lagrangiano el problema de 18 se puede convertir en su forma dual [23], de esta forma se tiene:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \frac{1}{2} \alpha^T Q \alpha - e^T \alpha \\ \text{s.a.} \quad & y^T \alpha = 0 \\ & 0 \leq \alpha \leq C \end{aligned} \quad (19)$$

Donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  es un vector de multiplicadores de Lagrange positivos asociados con las restricciones de 16,  $e = [1, \dots, 1]^T$  es un vector de unos,  $Q$  es una matriz de  $l$  por  $l$  dimensiones:

$$Q_{ji} = y_i y_j K(x_i, x_j) \quad (20)$$

y  $K(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$  es la respectiva función de kernel [24]. Después de solucionar el problema dual descrito en 19 los valores óptimos de  $w$  se pueden establecer como:

$$w = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i \phi(x_i) \quad (21)$$

Finalmente la función que permite realizar la clasificación es:

$$\text{sing}(w^T \phi(x) + b) = \text{sing} \left( \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i K(x_i, x) + b \right) \quad (22)$$

### 3. Resultados

Con la finalidad de realizar el entrenamiento de la máquina de soporte vectorial se recolectaron los datos para diferentes condiciones iniciales (aleatorias entre 0 y 1) de las ecuaciones de Lorenz cuando se tiene un sistema con y sin caos.

Uno de los aspectos a tener presente en la clasificación consiste en poder caracterizar adecuadamente los datos para lo cual se consideran dos casos experimentales:

Caso 1: datos para  $r = 28$  con caos y  $r = 10$  sin caos.

Caso 2: datos para  $r = 28$  con caos y  $r = 22$  sin caos.

En el primer caso, mediante los valores del parámetro  $r$  se busca poder diferenciar el comportamiento caótico del no caótico; por su parte, en el segundo  $r$  se acerca al valor crítico para el cual se presenta el comportamiento caótico de tal forma que con esta configuración se espera un porcentaje de clasificación menor.

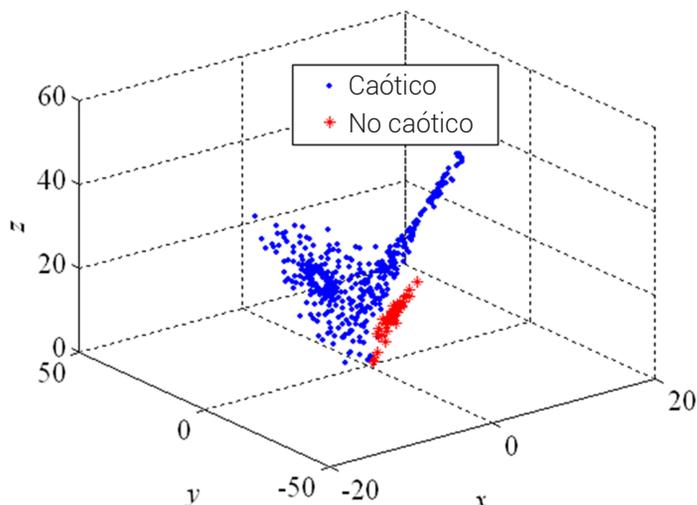
Para la recolección de los datos de cada caso considerado, se realizaron cinco simulaciones de las ecuaciones de Lorenz para cada comportamiento con las respectivas condiciones iniciales de la tabla 1. Se toma un tiempo de muestreo de 0,1  $s$  teniendo 400 datos por ejecución para un total de 4000 datos de entrenamiento y 1000 para prueba los cuales se calculan con la sexta fila de las condiciones iniciales de la tabla 1.

**Tabla 1.** Condiciones iniciales aleatorias para la recolección de datos

<b>Comportamiento caótico</b>			
<b>No</b>	<b><math>x[0]</math></b>	<b><math>y[0]</math></b>	<b><math>z[0]</math></b>
1	0,9501	0,2311	0,6068
2	0,4860	0,8913	0,7621
3	0,4565	0,0185	0,8214
4	0,4447	0,6154	0,7919
5	0,9218	0,7382	0,1763
6	0,4057	0,9355	0,9169
<b>Comportamiento no caótico</b>			
<b>No</b>	<b><math>x[0]</math></b>	<b><math>y[0]</math></b>	<b><math>z[0]</math></b>
1	0,4103	0,8936	0,0579
2	0,3529	0,8132	0,0099
3	0,1389	0,2028	0,1987
4	0,6038	0,2722	0,1988
5	0,0153	0,7468	0,4451
6	0,9318	0,4660	0,4186

**Fuente:** elaboración propia

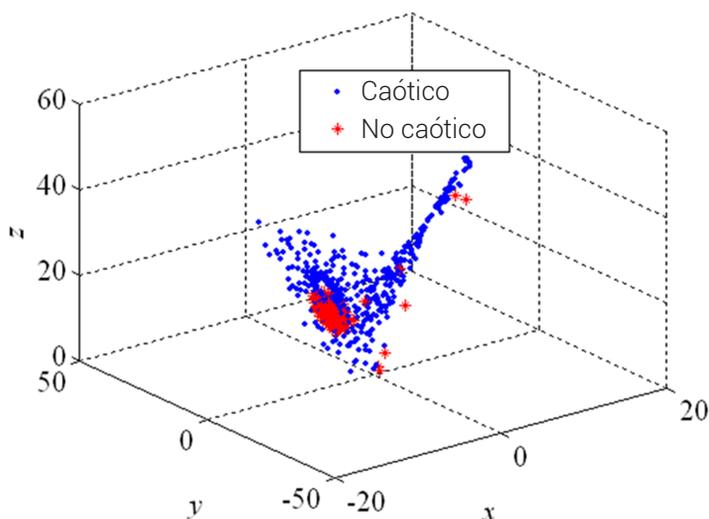
Los datos del caso 1 con una representación de tres dimensiones se tienen en la figura 5, donde se puede apreciar que es posible la separación de los dos tipos de comportamiento lo cual se busca realizar con la aplicación de las máquinas de soporte vectorial.



**Figura 5.** Datos del caso 1 localizados en tres dimensiones

Fuente: elaboración propia

Para el caso 2, la representación en tres dimensiones de los datos se tiene en la figura 6, donde se aprecia que los datos con y sin caos tienden a estar más mezclados.



**Figura 6.** Datos del caso 2 localizados en tres dimensiones

Fuente: elaboración propia

El entrenamiento se ejecuta en Octave con la librería LIBSVM [24]. Para los experimentos se toma  $C = 1$ ,  $c_0 = 0$  y  $d = 3$  (valores por defecto de LIBSVM) y se varía el parámetro  $\gamma$  para cada kernel. El valor sugerido para  $\gamma$  en LIBSVM es  $1/k$  donde  $k$  es el número de características [25]. Teniendo en cuenta lo anterior, se proponen los diferentes valores que se aprecian en la tabla 2, donde se consideran configuraciones con valores mayores y menores del sugerido.

Teniendo en cuenta lo presentado en [24], el índice de desempeño considerado corresponde al valor de precisión definido como:

$$\text{Precisión} = \frac{\text{Datos clasificados correctamente}}{\text{Total de datos}} \times 100\% \quad (23)$$

Para el caso 1, los resultados del proceso de experimentación con los datos de entrenamiento se pueden apreciar en la tabla 2, por otra parte, los resultados con los datos de prueba se tienen en la tabla 3.

**Tabla 2. Resultados del proceso de entrenamiento para el caso 1**

Kernel \ $\gamma$	0,125	0,250	0,500	1,000	2,000
Lineal	99,4763%				
Polinomio	99,601%	99,6758%	98,8279%	96,409%	53,9401%
Radial	99,7257%	99,7506%	99,9501%	99,9751%	99,9751%
Sigmoide	17,6309%	17,3067%	17,7057%	19,0524%	19,0025%

**Fuente:** elaboración propia

**Tabla 3. Resultados del proceso de validación del caso 1**

Kernel \ $\gamma$	0,125	0,250	0,500	1,000	2,000
Lineal	99,5012%				
Polinomio	99,7506%	99,7506%	98,6284%	94,5137%	55,1122%
Radial	99,7506%	99,7506%	99,8753%	99,8753%	99,7506%
Sigmoide	24,813%	23,6908%	23,6908%	25,3117%	25,0623%

**Fuente:** elaboración propia

Por su parte, para el caso 2 los resultados con los datos de entrenamiento se pueden apreciar en la tabla 4, y en la tabla 5 los resultados con los datos de validación.

**Tabla 4. Resultados del proceso de entrenamiento del caso 2**

Kernel \ $\gamma$	0,125	0,250	0,500	1,000	2,000
Lineal	93,292%				
Polinomio	90,898%	80,150%	72,843%	38,404%	75,611%
Radial	99,352%	99,601%	99,726%	99,800%	99,900%
Sigmoide	27,431%	25,985%	22,793%	25,112%	25,237%

**Fuente:** elaboración propia

**Tabla 5. Resultados del proceso de validación para el caso 2**

Kernel \ $\gamma$	0,125	0,250	0,500	1,000	2,000
Lineal	93,766%				
Polinomio	91,272%	81,172%	74,190%	41,147%	77,431%
Radial	99,127%	99,002%	99,002%	98,878%	98,878%
Sigmoide	25,686%	24,564%	22,070%	23,566%	23,566%

**Fuente:** elaboración propia

En estos resultados, para el caso 1 se puede apreciar que se logra una buena clasificación con un kernel de tipo lineal; la mejor clasificación se presenta empleando un kernel de base radial seguida de la polinómica, la peor clasificación se tiene para un kernel de tipo sigmooidal. También se observa un caso poco favorable cuando se emplea  $\gamma = 2$  con un kernel polinómico.

Por su parte, para el caso 2 el porcentaje de clasificación baja según lo esperado donde el kernel de tipo radial presenta el mejor desempeño. También es de notar que el kernel polinómico se afecta considerablemente dependiendo del valor de gamma empleado. En ambos casos considerados el kernel sigmooidal presenta el desempeño más bajo.

## 4. Discusión

De acuerdo con [8] y [10] se han realizado diferentes variaciones de SVM para mejorar la clasificación de datos lo cual depende de las características diferenciables que se puedan tener de estos. Al respecto también se presenta el cuestionamiento sobre la cantidad y características de los datos para lograrlo sin llegar a incrementar la complejidad de la SVM. En esta propuesta se realiza un acercamiento experimental para observar este aspecto considerando la identificación del comportamiento caótico de las ecuaciones de Lorenz.

En esta implementación se utilizan datos tomados directamente del dominio del tiempo sin un procesamiento preliminar, por lo cual este enfoque permite una implementación directa de la clasificación, sin embargo, para lograr separar las características de señales tomadas del tiempo se puede requerir un procesamiento previo, aspecto que se debe tener presente en aplicaciones donde el método aquí presentado no tenga buenos resultados.

La técnica de clasificación mediante SVMs puede ser de utilidad para realizar diagnóstico de pacientes empleando mediciones de las señales biológicas. Para esto se puede considerar, en primera instancia, utilizar directamente las señales medidas, y en una segunda etapa, realizar un procesamiento preliminar para extraer las características significativas que permitan la clasificación.

Para la implementación de SVMs se deben considerar las características de los datos a clasificar; en este trabajo se busca mostrar este aspecto variando el parámetro  $r$  de las ecuaciones de Lorenz.

## 5. Conclusiones

En este documento se evidencia que mediante máquinas de soporte vectorial se logra una adecuada clasificación del comportamiento caótico que presentan las ecuaciones de Lorenz para los casos considerados. De esta forma se puede apreciar que la relación entre las variables de las ecuaciones de Lorenz permite identificar el comportamiento caótico y no caótico de este sistema utilizando datos directamente en el dominio del tiempo.

Aunque se tienen resultados satisfactorios, para lograr una mayor caracterización de las ecuaciones de Lorenz se podrían tomar más datos empleando diferentes configuraciones de sus parámetros. También para mejorar la clasificación se puede considerar realizar un procesamiento preliminar para extraer características significativas que sirvan para la clasificación.

Para la mayoría de las configuraciones empleadas de la máquina de soporte vectorial se tienen un resultado satisfactorio, sin embargo, para la función de kernel de tipo sigmoide se tiene desempeño bajo, lo cual se debe tener presente al momento de realizar otra implementación de este tipo.

En los resultados experimentales para el primer caso se lograron resultados similares utilizando un kernel de tipo lineal, polinómico y radial, mientras que en el segundo caso se observan diferencias significativas.

En un trabajo futuro se puede extender el análisis considerando diferentes parámetros de las ecuaciones de Lorenz para identificar los casos donde se puede diferenciar este comportamiento.

Este trabajo se espera tomar como referente para emplear la técnica de SVM en la caracterización de señales biológicas de tal forma que se pueda realizar diagnóstico sobre la condición de salud de un paciente.

## Referencias

- [1] A. Stefanski, T. Kapitaniak y J. Brindley, "Dynamics of coupled Lorenz systems and its geophysical implications", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 98, no. 2-4, pp. 594-598, 1996, doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(96\)00106-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(96)00106-6)
- [2] Y. Zhang, J. Yang, K. Wang, Y. Wang y Z. Wang, "Improved wind prediction based on the Lorenz system", *Renewable Energy*, vol. 81, pp. 219-226, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2015.03.039>
- [3] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Cambridge, Perseus Books, 1994.
- [4] P. Vadasz, "Analytical prediction of the transition to chaos in Lorenz equations", *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 5, pp. 503-507, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.12.012>
- [5] C. Li, J.C. Sprott, W. Thio, "Linearization of the Lorenz system", *Physics Letters A*, vol. 379, pp. 888-893, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.01.003>
- [6] B. Munmuangsaen, B. Srisuchinwong, "A hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 107, pp. 61-66, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.12.017>
- [7] M.A. Hearst, S.T. Dumais, E. Osuna, J. Platt y B. Scholkopf, "Support vector machines", *IEEE Intelligent Systems and their Applications*, vol. 13, no. 4, 1998, doi: <https://doi.org/10.1109/5254.708428>
- [8] D. Tomar y S. Agarwal, "Twin Support Vector Machine: A review from 2007 to 2014", *Egyptian Informatics Journal*, vol. 16, pp. 55-69, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.eij.2014.12.003>

- [9] R. Khemchandania, K. Goyal y S. Chandrab, "TWSVR: Regression via Twin Support Vector Machine", *Neural Networks*, vol. 74 pp. 14-21, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2015.10.007>
- [10] J. Tang y Y. Tian, "A multi-kernel framework with nonparallel support vector machine", *Neurocomputing*, vol. 266, pp. 226-238, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.05.036>
- [11] S.V. Dudul, "Prediction of a Lorenz chaotic attractor using two-layer perceptron neural network", *Applied Soft Computing*, vol 5, no. 4, pp. 333-355, 2005, doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2004.07.005>
- [12] U. Köse y A. Arslan, "An Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System-Based Approach to Forecast Time Series of Chaotic Systems", *Chaos, Complexity and Leadership*, pp. 17-22, 2012, doi: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-7362-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-7362-2_3)
- [13] L. Morales, H. Espitia y J. Soriano, "Propuesta de un sistema NEURO-DBR y su aplicación en la predicción de la serie de tiempo de lorenz", *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, vol. 20, no. 2, pp. 31-51, 2010, doi: <https://doi.org/10.18359/rcin.275>
- [14] L.A. Dmitrieva, Y.A. Kuperin, N.M. Smetanin y G.A. Chernykh, "Method of calculating Lyapunov exponents for time series using artificial neural networks committees", *Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION*, pp. 127-132, 2016, doi: <https://doi.org/10.1109/DD.2016.7756827>
- [15] L. Zhang, "Artificial Neural Network Model Design and Topology Analysis for FPGA Implementation of Lorenz Chaotic Generator", *IEEE 30th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*, pp. 1-4, 2017, doi: <https://doi.org/10.1109/CCECE.2017.7946635>
- [16] J.S.H. Tsai, J.S. Fang, J.J. Yan, M.C. Dai, S.M. Guo y L.S. Shieh, "Hybrid robust discrete sliding mode control for generalized continuous chaotic systems subject to external disturbances", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 29, pp. 74-84, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2018.01.001>
- [17] H. Wendt, *Support Vector Machines for Regression Estimation and their Application to Chaotic Time Series Prediction*, Thesis, Vienna University of Technology Faculty of Electrical Engineering and Information Technology, 2005, doi: <https://pdfs.semanticscholar.org/7aa7/9531f16af48bd5132bc5b174a8502d6b15d9.pdf>

- [18] F. Tay y L. Cao, "Modified support vector machines in financial time series forecasting", *Neurocomputing*, vol. 48, no. 1-4, pp. 847-861, 2002, doi: [https://doi.org/10.1016/S0925-2312\(01\)00676-2](https://doi.org/10.1016/S0925-2312(01)00676-2)
- [19] L. Ralaivola y F. d'Alche Buc, "Dynamical modeling with kernels for nonlinear time series prediction", *Proceedings of the 16th International Conference on Neural Information Processing Systems*, NIPS'03, pp. 129-136, 2003, doi: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2981345.2981362>
- [20] J. Gómez y J. Martínez, "Support Vector Machines", *Springer Computational Intelligence*, pp. 147-191, 2007, doi: [https://doi.org/10.1007/0-387-37452-3\\_7](https://doi.org/10.1007/0-387-37452-3_7)
- [21] I. Steinwart y A. Christmann, *Support Vector Machines*, Information Science and Statistics, Springer Science & Business Media, 2008, doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-77242-4>
- [22] B. Scholkopf y A.J. Smola, *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*, MIT Press Cambridge, MA, USA, 2001, doi: <https://mitpress.mit.edu/books/learning-kernels>
- [23] G. Betancourt, "Las máquinas de soporte vectorial (SVMs)", *Scientia et Technica*, vol. 1, no. 27, 2005, doi: <http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/6895>
- [24] C.C. Chang y C.J. Lin, "LIBSVM: a library for support vector machines", *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, vol. 2, no. 27, pp. 1-27, abr. 2011, doi: <https://dl.acm.org/citation.cfm?doid=1961189.1961199>
- [25] D. Meyer, "Support Vector Machines", *R-News*, vol. 1, no. 3, pp. 23-26, September 2001, doi: [https://cran.r-project.org/doc/Rnews/Rnews\\_2001-3.pdf](https://cran.r-project.org/doc/Rnews/Rnews_2001-3.pdf)